§1: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

Bài 1) Đổi radian các góc (cung) có số đo.

a) $30^0;45^0;60^0;90^0;120^0;150^0;180^0$

b) $15^0;75^0;135^0;225^0;270^0;$

c) $22^0 30';67^0 30';10^0 30'15";18^0 20'12"$

Bài 2) Đổi ra độ các góc (cung) có số đo.

a) $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{4};\frac{11\pi}{6};\frac{3\pi}{2};$

b) $\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{36};0,75;1,75\pi;1,48;2,15$

§2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

TÓM TẮT

Công thức lượng giác cơ bản:

❶ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

❷ $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

❸ $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\alpha\neq k\pi, k\in Z$.

❹ $\tan\alpha.\cot\alpha=1$ với $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

❺ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ với $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

❻ $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ với $\alpha\neq k\pi, k\in Z$.

Bài tập tự luyện

Bài 1) Xác định dấu của các biểu thức sau.

a) $A=\sin 50^0.\cos(-300^0)$

b) $B=\sin 215^0.\tan\frac{21\pi}{7}$

c) $C=\cot\frac{3\pi}{5}.\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

d) $D=\cos\frac{4\pi}{5}.\sin\frac{\pi}{3}.\cot\frac{9\pi}{5}$

Bài 2) Cho $0^0<\alpha<90^0$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A=\sin(\alpha+90^0)$

b) $B=\cos(\alpha-45^0)$

c) C = $\cos(270^0 - \alpha)$ **d)** D = $\cos(2\alpha + 90^0)$

Bài 3) Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) A = $\cos(\alpha + \pi)$ **b)** B = $\tan(\alpha - \pi)$

c) C = $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$ **d)** D = $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$

Bài 4) Cho tam giác ABC. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) A = $\sin A + \sin B + \sin C$ **b)** B = $\sin A.\sin B.\sin C$

c) C = $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$ **d)** D = $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}$

Bài 5) Tính các giá trị lượng giác của góc biết:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ **b)** $\cos\alpha = \frac{4}{5},\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

c) $\cos\alpha = -\frac{5}{7},\ -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ **d)** $\tan\alpha = \frac{4}{3},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

e) $\cot\alpha = -\sqrt{3},\ -\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$ **f)** $\tan\alpha = \frac{7}{3},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

g) $\sin a = \frac{4}{5},\ 270^0 < a < 360^0$ **h)** $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

i) $\sin a = \frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2} < a < \pi$ **j)** $\sin\alpha = -\frac{1}{3},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

k) $\tan a = 3,\ \pi < a < \frac{3\pi}{2}$ **l)** $\tan\alpha = -2,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Bài 6) Cho $\tan\alpha = 3$, tính giá trị các biểu thức.

$A = \frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{4\sin\alpha + 3\cos\alpha}$ $B = \frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{5\sin^3\alpha - 4\cos^3\alpha}$

Bài 7) Cho $\cot\alpha = \frac{3}{5}$, tính giá trị các biểu thức.

a) $A = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

b) $B = \frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

c) $C = \frac{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + 10\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}$

Bài 8) Tính giá trị các biểu thức.

a) $A=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}$ biết $\cot\alpha=3$.

b) $B=\dfrac{2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-1}{-2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$ biết $\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$.

c) $C=\dfrac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}$ biết $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

d) $D=\dfrac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{\tan\alpha}$ biết $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

e) $E=\dfrac{4\cot\alpha+3}{1-5\sin\alpha}$ biết $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3},\ \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

f) $F=\dfrac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\cos\alpha-2\sin\alpha}$ biết $\tan\alpha=3$.

Bài 9) Cho $\tan\alpha+\cot\alpha=m$. Hãy tính:

a) $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$ **b)** $|\tan\alpha-\cot\alpha|$ **c)** $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha$

Bài 10) Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Hãy tính:

a) $\sin\alpha\cos\alpha$ **b)** $|\sin\alpha-\cos\alpha|$

c) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$ **d)** $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$

Bài 11) Chứng minh các đẳng thức.

a) $\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x$

b) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\cos^2 x.\sin^2 x$

c) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cos^2 x.\cot^2 x$

d) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x.\sin^2 x$

e) $1+\sin x+\cos x+\tan x=(1+\cos x)(1+\tan x)$

f) $\sin^2 x.\tan x+\cos^2 x.\cot x+2\sin x.\cos x=\tan x+\cot x$

g) $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x-\cos x+1}$

h) $\dfrac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=1+\tan^2 x$

Bài 12) Chứng minh các đẳng thức.

a) $\tan a.\tan b=\dfrac{\tan a+\tan b}{\cot a+\cot b}$

b) $\dfrac{\sin a}{\sin a-\cos a}-\dfrac{\cos a}{\cos a-\sin a}=\dfrac{1+\cot^2 a}{1-\cot^2 a}$

c) $1-\dfrac{\sin^2 a}{1+\cot a}-\dfrac{\cos^2 a}{1+\tan a}=\sin a.\cos a$

d) $\dfrac{\sin^2 a}{\sin a-\cos a}-\dfrac{\sin a+\cos a}{\tan^2 a-1}=\sin a+\cos a$

e) $\dfrac{1+\cos a}{\sin a}\left[1-\dfrac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right]=2\cot a$

f) $\dfrac{\tan^2 a}{1+\tan^2 a}.\dfrac{1+\cot^2 a}{\cot^2 a}=\dfrac{1+\tan^4 a}{\tan^2 a+\cot^2 a}$

g) $\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}\right)^2=4\tan^2 a$

h) $\dfrac{\tan^2 a-\tan^2 b}{\tan^2 a.\tan^2 b}=\dfrac{\sin^2 a-\sin^2 b}{\sin^2 a.\sin^2 b}$

i) $\dfrac{\sin^2 a-\tan^2 a}{\cos^2 a-\cot^2 a}=\tan^6 a$

j) $\dfrac{\tan^3 a}{\sin^2 a}-\dfrac{1}{\sin a.\cos a}+\dfrac{\cot^3 a}{\cos^2 a}=\tan^3 a+\cot^3 a$

Bài 13) Rút gọn các biểu thức.

a) $\mathrm{A}=(1-\sin^2 x)\cot^2 x+1-\cot^2 x$

b) $\mathrm{B}=(\tan x+\cot x)^2-(\tan x-\cot x)^2$

c) $C=\dfrac{\cos^2 x+\cos^2 x.\cot^2 x}{\sin^2 x+\sin^2 x.\tan^2 x}$

d) $C=\dfrac{\sin^2 x-\tan^2 x}{\cos^2 a-\cot^2 x}$

e) $D=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^4 x}$

f) $E=\sqrt{\sin^2 x(1+\cot x)+\cos^2 x(1+\tan x)}$

g) $G=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}};\quad x\in(0,\ \pi)$

Bài 14) Chứng minh các biểu thức sau độc lập đối với x.

a) $\mathrm{A}=\cos^2 x.\cot^2 x+3\cos^2 x-\cot^2 x+2\sin^2 x$

b) $B=\dfrac{\tan^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}+\dfrac{\cot^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}$

TÓM TẮT

Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt:

❶ *Cung đối nhau:* α *và* $-\alpha$

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

❷ *Cung bù nhau:* α *và* $\pi - \alpha$

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

❸ *Cung phụ nhau:* α *và* $\frac{\pi}{2} - \alpha$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

❸ *Cung hơn kém* $\frac{\pi}{2}$*:* α *và* $\frac{\pi}{2} + \alpha$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

❺ *Cung hơn kém* π*:* α *và* $\pi + \alpha$

- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$
- $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

Bài tập tự luyện

Bài 1) Cho $\tan(\pi + x) = 1 - \sqrt{2}$, $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$

a) Tính $\tan x$, $\cot x$, $\sin x$, $\cos x$.

b) Tính $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \tan\left(\frac{5\pi}{2} - x\right), \sin(x - 3\pi), \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$.

Bài 2) Cho $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{3}{5}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Tính

a) $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

b) $\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right), \tan\left(\frac{5\pi}{2}-x\right), \sin\left(x-\pi\right), \cos\left(\frac{3\pi}{x}+x\right)$

Bài 3) Rút gọn biểu thức.

a) $\mathrm{A}=\sin\left(\pi+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cot\left(2\pi-\alpha\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

b) $B=\cos\left(\alpha-5\pi\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

c) $\mathrm{C}=\cot\left(\alpha-2\pi\right).\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha-6\pi\right)-2\sin\left(\alpha-\pi\right)$

d) $D=\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\tan\left(\pi-\alpha\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\pi-\alpha\right)}-2\cos\alpha$

Bài 4) Chứng minh:

a) $\cos 20^0+\cos 40^0+...+\cos 160^0+\cos 180^0=-1$

b) $\tan 50^0+\tan 75^0=\tan 230^0+\tan 255^0$

c) $\cos 20^0+\cos 40^0=\sin 110^0+\sin 130^0$

d) $\sin 25^0+\sin 65^0=\sin 155^0+\sin 115^0$

e) $\sin 75^0+\sin 65^0+\cos 165^0+\cos 205^0=0$

f) $\dfrac{\sin 168^0-\sin 192^0}{\sin 78^0}\cot 12^0=2$

Bài 5) Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $\sin B=\sin(A+C)$

b) $\cos(A+B)=-\cos C$

c) $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

d) $\cos(B-C)=-\cos(A+2C)$